221. Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Cadre : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

I. Définitions. Existence, unicité et espace de solutions

1) Définitions. Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

[Dem] Déf. (1) : Une équation différentielle linéaire (EDL) d'ordre 1 sur K^n est une équation de la forme : $\underset{(E)}{Y' = A(t)Y + B(t)}$ où $A : I \to \mathcal{M}_n(K)$, $B : I \to K^n$ sont continues. 197

Si $(t_0, V_0) \in I \times K^n$, on appellera solution de (E) au problème de Cauchy de conditions initiales (c.i.) (t_0, V_0) un couple (Y, J) où $t_0 \in J \subset I$ est un intervalle, $Y \in \mathcal{C}^1(J, K^n)$, Y vérifie (E) et $Y(t_0) = V_0$.

[Gou] Rq (2) : Si $(E') : Y^{(p)} = A_{p-1}(t)Y^{(p-1)} + \dots + A_0(t)Y + B(t)$ est une EDL

377 d'ordre p, alors (E') peut se ramener à une EDL d'ordre 1 :

$$Y \text{ vérifie } (E') \iff \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & I_n \\ A_0(t) & \cdots & & A_{p-1}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}.$$

~378 **Th. (3) : (Cauchy-Lipschitz linéaire) (c.i.)**
Soient $A : I \to \mathcal{M}_n(K)$, $B : I \to K^n$ deux applications continues et
DVP $(E) : Y' = A(t)Y + B(t)$. Pour tout $(t_0, Y_0) \in I \times K^n$, il existe une unique solution $Y \in \mathcal{C}^1(\underline{I}, \mathbb{R}^n)$ de (E) telle que $Y(t_0) = Y_0$.

378 Rq (4) : La version du Th (3) pour les EDL d'ordre p est :
$\forall (t_0, X_0 \dots X_{p-1}) \in I \times K^n$, $\exists!\ \varphi \in \mathcal{C}^p(I, K^n)$ / φ vérifie l'équation et $\varphi^{(i)}(t_0) = X_i$, $0 \leq i \leq p-1$.

2) Espace de solutions

[Dem] Prop. (5) : $(E_0) : Y' = A(t)Y$. L'ensemble S_0 des solutions de (E) est un sev de $\mathcal{C}^1(I, K^n)$. De plus, pour tout $t_0 \in I$, $\Phi_{t_0} : \begin{array}{l} S_0 \to K^n \\ Y \mapsto Y(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme de K-ev. On a donc $\dim_K S_0 = n$. 198

Prop. (6) : $(E) : Y' = A(t)Y + B(t)$. L'ensemble S' des solutions de (E) est un espace affine de direction S_0 (de Prop. (5)).

Déf. (7) : $(E_0) : Y' = A(t)Y$. Soient $V_1 \dots V_n$ des solutions de (E_0). Le wronskien de ces solutions est $W : \begin{array}{l} I \to K \\ t \mapsto \det(V_1(t) \dots V_n(t)) \end{array}$ [Gou] 378

Prop. (8) : Avec les notations de Déf (7), $\operatorname{rg}(V_1(t) \dots V_n(t))$ est indépendant de t. 379

Coro. (9) : $(V_1, \dots V_n)$ est une base de S_0 ssi il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$.

II. Résolution explicite des EDL

Rq. (10) : On supposera connues les propriétés de l'exponentielle matricielle ainsi que la décomposition de Dunford. [Dem]

1) $Y' = AY$ (E_0)

Cadre : $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $I = \mathbb{R}$

Th (11) : L'unique solution de (E_0) de c.i. $(t_0, V_0) \in \mathbb{R} \times K^n$ est $Y : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{(t-t_0)A} . V_0$ 201

Prop. (12) : Si $\lambda \in K$ est une valeur propre (vp) de A et $V \in K^n$ un vecteur propre ($\vec{vp}$) associé, alors $e^A V = e^\lambda V$. 199

Coro (13) : Si A est diagonalisable de vp $(\lambda_1 \dots \lambda_n)$, et $V_1 \dots V_n$ sont des $\vec{vp}$ associés, alors $(t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda_i t} V_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de S_0 199

Exo (14) : Déterminer une base de solutions du système ~215 différentiel $\begin{cases} x' = y \\ y' = 2x - y \end{cases}$

Coro (14) : Soit l'EDL scalaire d'ordre n : $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$ où $a_0 \dots a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On note $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ le polynôme caractéristique de la matrice compagnon associée. Si P admet n racines distinctes $\lambda_1 \dots \lambda_n$, alors $(t \mapsto e^{\lambda_i t})_{1 \leq i \leq n}$ est une base de l'espace des solutions. 206

♡ Ex.(15): $(t\mapsto e^t,\ t\mapsto e^{-2t})$ est une base de l'ensemble des solutions de : $y''+y'-2y=0$.

199 Rq(16): Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas diagonalisable, on détermine sa décomposition de Dunford (sur $\mathbb{C}$ si besoin) pour calculer e^{tA}

♡ Ex.(17): $\begin{cases}x'=x+y\\ y'=y\end{cases}$ $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ et $e^{tA}=\begin{pmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{pmatrix}$

Prop.(18): Avec les notations de Coro(14), si P admet pour racines $\lambda_1\dots\lambda_s$ de multiplicités respectives $m_1\dots m_s$, alors

208 $\{t\mapsto t^q e^{\lambda_i t},\ 1\le i\le s,\ 0\le q\le m_i-1\}$ est une base de l'ensemble des solutions. (Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on prend les parties réelles et imaginaires des solutions sur $\mathbb{C}$).

[Gou] 381 Ex.(19): Les solutions de $y''+2y'+y=0$ sont de la forme $t\mapsto(\alpha+\beta t)e^{-t}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

2) $Y'=AY+B(t)$ (E)

Cadre: $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B:I\to\mathbb{K}^n$ continue

[Dem] 202 Méthode(20): On utilise la méthode de la variation de la constante, qui consiste à chercher une solution de la forme $Y(t)=e^{tA}V(t)$ où $V\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K}^n)$. Le théorème de C.L. permet ensuite de conclure.

203 Th.(21): La solution de (E) de c.i. $(t_0,V_0)\in I\times\mathbb{K}^n$ est :

$$Y(t)=e^{(t-t_0)A}.V_0+\int_{t_0}^t e^{(t-u)A}B(u)\,du \qquad \forall t\in I.$$

[Gou] 381 Ex.(22): Les solutions de $y'=-y+\sin t$ sont de la forme $t\mapsto\alpha e^{-t}+\frac{\sin t-\cos t}{2}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Rq(23): On n'est pas toujours capable de calculer explicitement $\int_{t_0}^t e^{(t-u)A}B(u)\,du$

3) $Y'=A(t)Y$ (E_0) et $Y'=A(t)Y+B(t)$ (E)

Cadre: $A:I\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B:I\to\mathbb{K}^n$ sont continues

Rq(24): On ne sait en général pas résoudre explicitement (E_0) ni (E), sauf en dimension 1 :

Prop.(25): Si $q:I\to\mathbb{R}$ et $r:I\to\mathbb{R}$ sont continues et Q est une primitive de q, alors les solutions de $y'=q(t)y+r(t)$ sont ♡

de la forme : $y(t)=\alpha e^{Q(t)}+\int_{t_0}^t e^{Q(t)-Q(u)}r(u)\,du$ où $t_0\in I$. [Dem]

Déf.(26): Soit $t_0\in I$. La résolvante de (E_0) : $Y'=A(t)Y$ est pour $t\in I$

$R(t,t_0):\ \mathbb{K}^n \xrightarrow{\Phi_{t_0}^{-1}} S_0 \xrightarrow{\Phi_t} \mathbb{K}^n$, $V\mapsto Y\mapsto Y(t)$ où Φ_t est définie en Prop.(5). 210

Prop.(27): 1) $\forall t\in I$, $R(t,t)=I_n$ 2) $\forall(t_0,t_1,t_2)\in I^3$, $R(t_2,t_1)R(t_1,t_0)=R(t_2,t_0)$ 211

3) $R(\cdot,t_0)\in\mathcal{C}^1(I,\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ est la solution de $\Pi'=A(t)\Pi$ de c.i. $\Pi(t_0)=I_n$

Prop.(28): Si $A(u)A(v)=A(v)A(u)$ pour tous $u,v\in I$, 211

alors $R(t,t_0)=\exp\left(\int_{t_0}^t A(u)\,du\right)$. [Gou]

Rq(29): Si on connaît une base $(V_1\dots V_n)$ de l'ensemble des solutions 379

de (E_0), on peut toujours essayer la méthode de variation de la constante pour trouver les solutions de (E).

III. Étude qualitative. Point critique et stabilité

1) Exemple : l'équation de Hill-Mathieu

Exo.(30): Soit $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue, paire et π-périodique. [ZQ] 410

On considère l'EDL d'ordre 2 : $y''+q(t)y=0$. DVP2

Étudier l'existence de solutions bornées de (E).

2) Stabilité des solutions de $Y' = AY$

Cadre : $A \in \mathcal{M}_n(K)$. $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}^n$ vérifie les conditions du théorème de C.L. global. $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times U$ et on suppose que la solution maximale de (H) : $y' = f(t,y)$ de c.i. (t_0, y_0) est définie sur $[t_0, +\infty[$.

[Dem] Déf. 31 : On note $y(t, z)$ la solution maximale de (H) de c.i. (t_0, z).
On dit que $y(t, y_0)$ est stable si : $\exists B_f(y_0, r) \subset U$, $\exists C \geq 0$ /

281 1) $\forall z \in \overline{B}(y_0, r)$, $t \mapsto y(t, z)$ est définie sur $[t_0, +\infty[$

2) $\forall z \in \overline{B}(y_0, r)$, $\forall t \geq t_0$: $\|y(t,z) - y(t, y_0)\| \leq C\|z - y_0\|$

282 $y(t, y_0)$ est dite asymptotiquement stable si elle est stable et si :

2') $\exists \gamma : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, $\gamma(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ telle que :

$\forall z \in \overline{B}(y_0, r), \forall t \geq t_0$: $\|y(t,z) - y(t,y_0)\| \leq \gamma(t) \|z - y_0\|$

Th. 32 : Soit $\lambda_1 \dots \lambda_n$ les vp de A dans $\mathbb{C}$. Alors les solutions de $Y' = AY$ sont :

284 1) stables SSI pour tout j, $Re(\lambda_j) < 0$ ou $Re(\lambda_j) = 0$ et le bloc de Jordan correspondant est diagonalisable

2) asymptotiquement stables SSI pour tout j, $Re(\lambda_j) < 0$

♡ Ex. 33 : Les solution de $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -y \end{cases}$ sont asymptotiquement stables

3) Portraits de phase en dimension 2

Cadre : $A \in GL_2(\mathbb{R})$. On souhaite tracer les trajectoires $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ des solutions de $Y' = AX$.

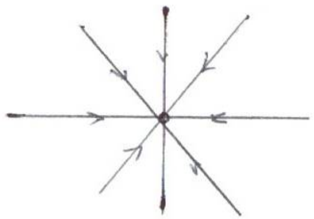
Rq 34 : 0 est le seul point critique de $Y' = AX$.

[Dem] 290+ ou [2Q] 383 Prop. 35 : On peut selon les valeurs propres $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ de A tracer le portrait de phase de $Y' = AX$, à partir du calcul de l'exponentielle de la matrice à laquelle A est semblable : $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $b \neq 0$

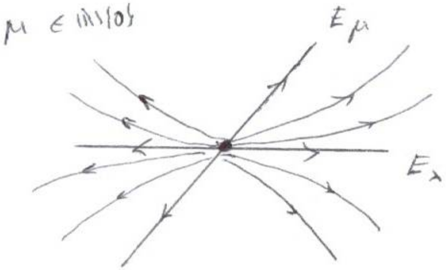
ANNEXE

Prop. 35 :

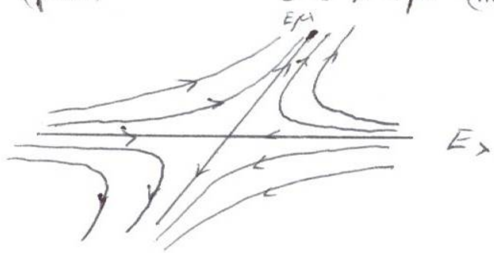
A admet 2 vp réelles : $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$



$\lambda = \mu < 0$ (puits)

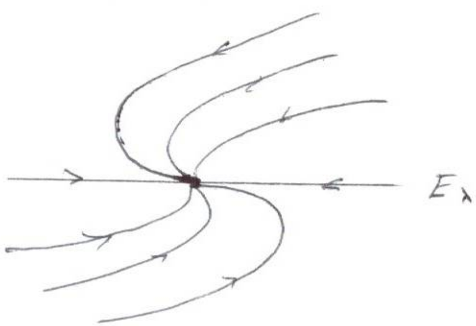


$0 < \lambda < \mu$ (noeud instable)



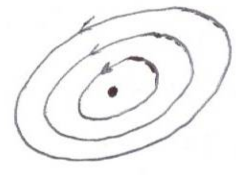
$\lambda < 0 < \mu$ (col)

A admet une vp double : $\lambda < 0$

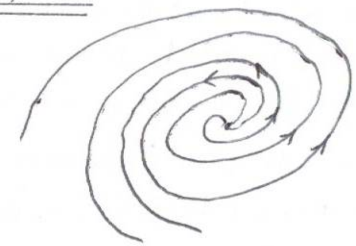


(noeud dégénéré stable)

A admet 2 vp complexes conjuguées : $\lambda = a + ib$, $b \neq 0$



$a = \operatorname{Re} \lambda = 0$ (centre)



$a = \operatorname{Re} \lambda > 0$ (foyer instable)

Références

- [Gou] Gourdon, *Analyse* (3e éd.)
- [Dem] Demailly, *Analyse numérique et ED*
- [ZQ] Zuily, *Analyse pour l'agrégation* (4e éd.)